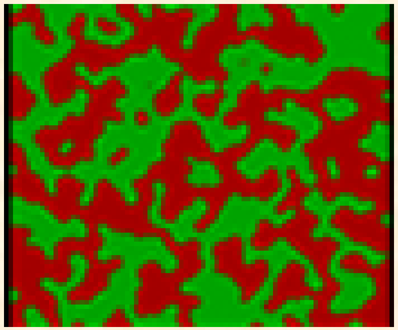
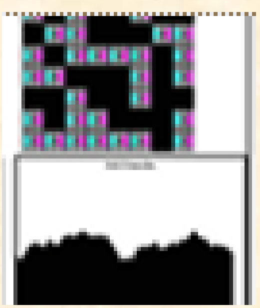
Kombinatorika

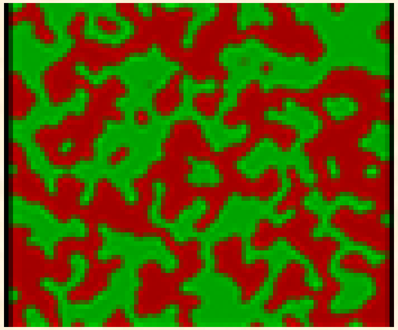
Kombinatorika

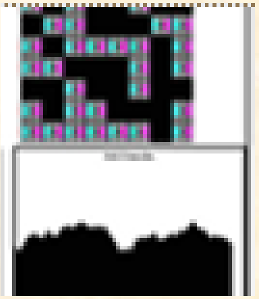




1. Permutációk (ismétléses, ismétlés nélküli)
2. Kombinációk (ismétléses, ismétlés nélküli)
3. Variációk (ismétléses, ismétlés nélküli)
4. Részhalmazok
5. Kompozíciók (K db részhalmaz diszjunkt uniója)
6. Partíciók (max. N db nem üres részhalmaz diszjunkt uniója)

Kombinatorika





I. Az elemszám előállítása

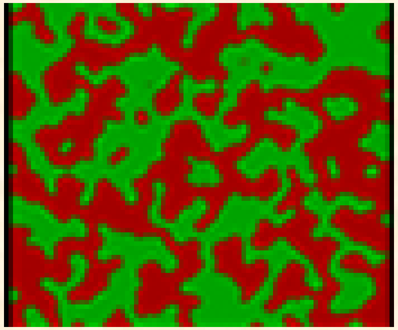
II. Az összes előállítása

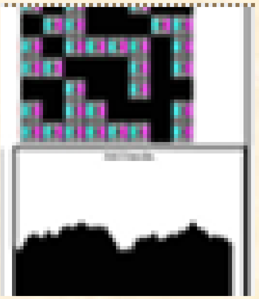
III. Az I. előállítása

IV. A következő előállítása

V. Egy véletlen előállítása

Kombinatorika - elemszám





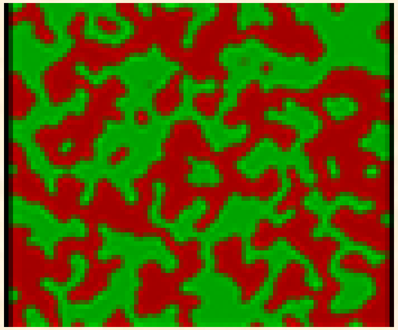
Ismétlés nélküli kombinációk

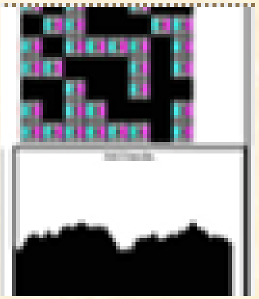
- Ismert képlet: $\binom{N}{K}$
- Rekurzív definíció 1: N elemből K elem választása
  - az első elemet választjuk, majd még N-1 elemből választunk K-1 elemet vagy
  - az első elemet nem választjuk és a maradék N-1 elemből választunk K elemet.

$\rightarrow$ B(N,K)=B(N-1,K-1)+B(N-1,K)

```
B(N,K):
  Ha K=0 vagy K=N akkor B:=1
  különben B:=B(N-1,K-1)+B(N-1,K)
Függvény vége.
```

Kombinatorika - elemszám





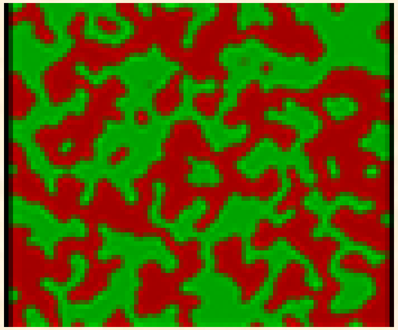
Ismétlés nélküli kombinációk

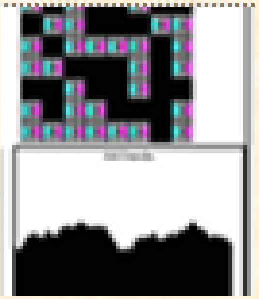
- Rekurzív definíció 2: N elemből K elem választása
  - először kiválasztunk K-1 elemet, majd
  - a maradék N-K+1 elemből kell egyet választani (de így minden kombináció pontosan K-féleképpen áll elő)

  → B(N,K)=B(N,K-1)*(N-K+1)/K

```
B(N,K):
  Ha K=0 akkor B:=1
  különben B:=B(N,K-1)*(N-K+1)/K
Függvény vége.
```

Kombinatorika - elemszám



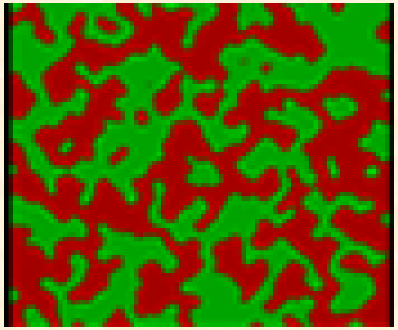


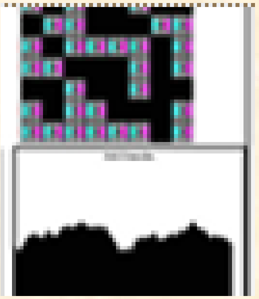
Elsőfajú Euler számok

- E(n,k) az első n természetes szám azon permutációi száma, ahol pontosan k emelkedés van (emelkedés van az i-edik helyen, ha $x_i<x_{i+1}$).
  - n-1 elem összes olyan permutációja, ahol pontosan k növekedés van: az n-edik számot a sorozat elejére vagy egy emelkedésbe tesszük;
  - n-1 elem összes olyan permutációja, ahol pontosan k-1 emelkedés van: n-edik elemet a sorozat végére vagy egy nem emelkedő helyre tesszük.

$\rightarrow \quad E(n,k)=(k+1)E(n-1,k)+(n-k)E(n-1,k-1)$

Kombinatorika - elemszám



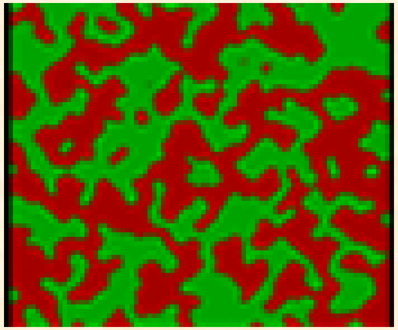


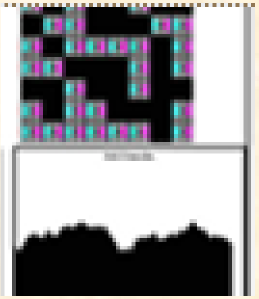
Másodfajú Euler számok

- E(n,k) az {1,1,2,2,…,n,n} sorozat azon permutációi száma, amelyekben pontosan k emelkedő részsorozat van, valamint bármely két K érték között csak K-nál nagyobb számok vannak.
  - n-1 elem összes olyan permutációja, ahol pontosan k növekedés van: az n-edik számpárt a sorozat elejére vagy egy emelkedésbe tesszük;
  - n-1 elem összes olyan permutációja, ahol pontosan k-1 emelkedés van: n-edik számpárt a sorozat végére vagy egy nem emelkedő helyre tesszük (ebből 2*n-1-k van).

→ $E(n,k)=(k+1)E(n,k-1)+(2n-1-k)E(n-1,k-1)$

Kombinatorika





Összes ismétlés nélküli permutáció

- Backtrack: $\forall i\ (1 \le i \le n)$: $\forall j\ (1 \le j < i)$: $X_j \ne X_i$

Összes ismétlés nélküli kombináció

- Backtrack: $\forall i\ (1 \le i \le k)$: $\forall j\ (1 \le j < i)$: $X_j < X_i$

Összes ismétléses kombináció

- Backtrack: $\forall i\ (1 \le i \le k)$: $\forall j\ (1 \le j < i)$: $X_j \le X_i$

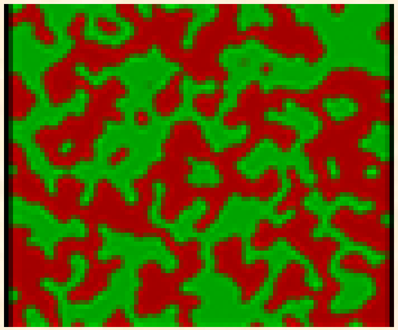
Összes kompozíció

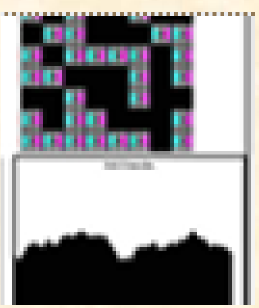
- Backtrack: Olyan K-jegyű számok, ahol a számjegyek összege pontosan N.

Összes partíció

- Backtrack: N felbontása pozitív (>0) számok összegére.

Kombinatorika



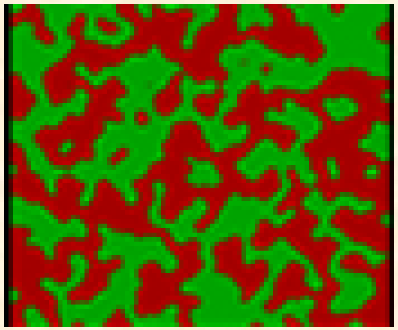


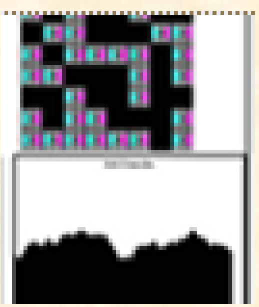
Összes ismétlés nélküli permutáció

- Ha N-1 elem összes permutációja kész, akkor szúrjuk be az N-et minden lehetséges helyre, mindegyikbe!

```
Permutáció(x,i,n):
   Ha i>n akkor Ki: x
   különben
      x(i):=i; Permutáció(x,i+1,n)
      Ciklus j=i-1-től 1-ig -1-esével
         Csere(x(j),x(j+1))
         Permutáció(x,i+1,n)
      Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Kombinatorika



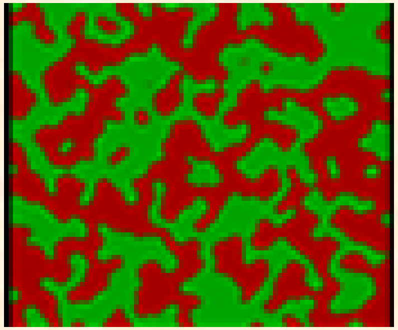


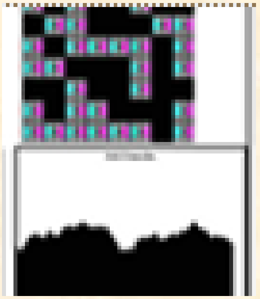
Összes részhalmaz

- Feleltessük meg a részhalmazokat kettes számrend-szerbeli számoknak!

`{}`	→	`0...0000`
`{1}`	→	`0...0001`
`{2}`	→	`0...0010`
`{1,2}`	→	`0...0011`
`{3}`	→	`0...0100`
`{1,3}`	→	`0...0101`
`{1,2,3}`	→	`0...0111`

Kombinatorika



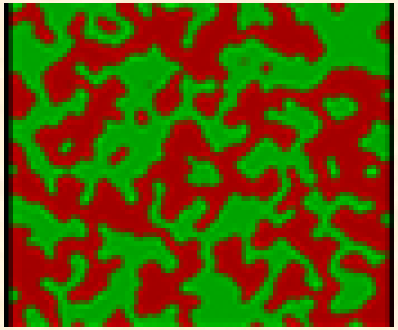


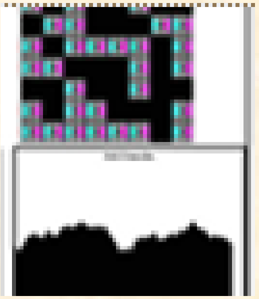
Összes ismétléses variáció

- Feleltessük meg a variációkat N alapú számrend-szerbeli K jegyű számoknak!

```
1,...,1,1     → 0...0000
1,...,1,2     → 0...0001
1,...,1,n     → 0...000(n-1)
1,...,2,1     → 0...0020
1,...,2,n     → 0...001(n-1)
n,...,n,n     → (n-1)...(n-1)
```

Kombinatorika

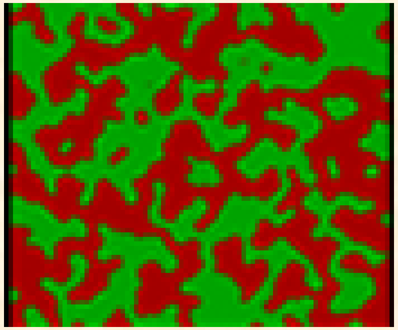


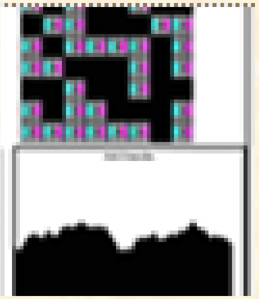


I-edik permutáció

- Feleltessük meg a permutációkat faktoriális szám-rendszerbeli N jegyű számoknak!
- Vegyük pl. a minimum-kiválasztásos rendezést!
- Jelentse F(j) a j-edik lépésbeli csere távolságát!
- Az F vektor alapján az eredeti sorrend visszaállítható!
- Minden i természetes számhoz ($0 \leq i < n!$) különböző F vektor tartozik, az i szám felírása faktoriális szám-rendszerben.

Kombinatorika

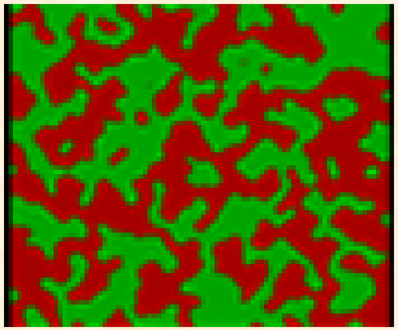


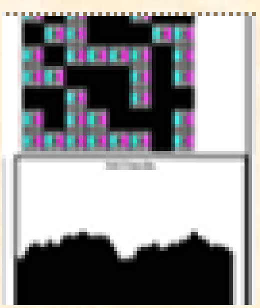


I-edik permutáció

```
Permutáció(i,n):
  x:=(1,2,...,n); K:=2
  Ciklus j=n-1-től 1-ig -1-esével
    t:=i mod K; i:=i div K
    Csere(x(j),x(j+t-1))
    K:=K+1
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Kombinatorika





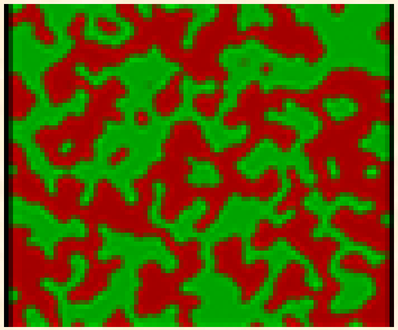
Következő permutáció

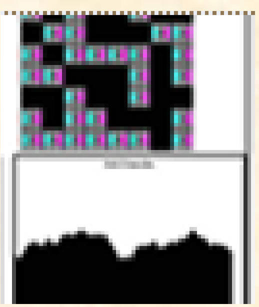
- $X_1, \ldots X_i, X_{i+1}, \ldots X_n$ rákövetkezője, ha $X_{i+1}, \ldots X_n$ monoton csökkenő és $X_i < X_{i+1}$: $X_1, \ldots X_{i-1}$, a régi X_i-nél nagyobbak közül a legkisebb, majd a többek monoton növekvően.

Példa:

X X X 4 7 5 3 → X X X 5 3 4 7

Kombinatorika



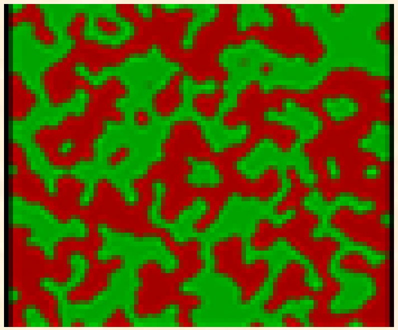


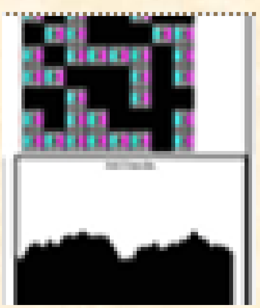
Véletlen permutáció

- keverés véletlen kiválasztással

```
Véletlen permutáció:
  Ciklus i=1-től N-1-ig
    j:=véletlen(i..N)
    Csere(X(i),X(j))
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Kombinatorika

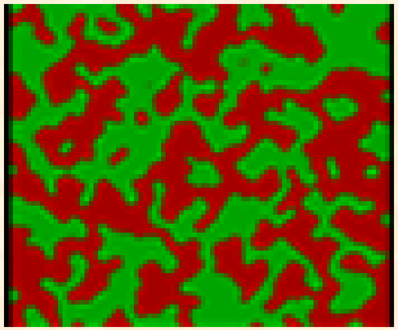


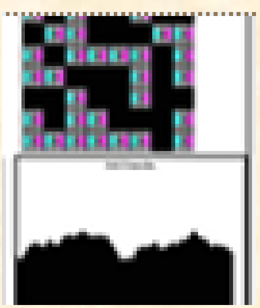


N*K elemű halmaz K egyenlő részre osz-tása véletlenszerűen:

```
Véletlen részekre osztás(N,K,H):
  Ciklus i=1-től K*N-1-ig
    j:=véletlen(i..N)
    Csere(X(i),X(j))
    m:=(i-1) div K; H(m):=H(m)∪X(i)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Kombinatorika



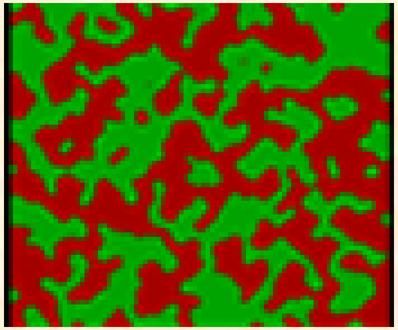


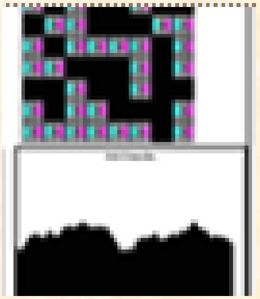
Véletlen kombináció

- kiválogatás N elemből ((K–DB)/(N–I+1) valószínűséggel az I. elemet)

```
Véletlen kombináció(N,K,DB,Y):
  DB:=0
  Ciklus i=1-től N-ig
    Ha véletlenszám<(K-DB)/(N-i+1)
       akkor DB:=DB+1; Y(DB):=i
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Kombinatorika





Véletlen kombináció

- kiválogatás tetszőleges számú elemből (K/I valószínűséggel az I. elemet I>K esetén)

```
Véletlen kombináció(K,DB,Y):
  Y():=(1,...,K)
  Ciklus i=K+1-től N-ig
    Ha véletlenszám<K/i
       akkor j:=véletlen(K); Y(j):=i
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Vége